Wiederholungen	Theoriekern	Anwendungen	Bemerkungen
1. Geradenscharen, Pt-Stg-Form			Das Thema Geradengleichung wird in scheinbar neuem Kontext wiederholt, der Umgang mit Formvariablen geübt, Schritt 3 vorbereitet
2. Parabeln/qu.Erg.	3. Tangente mittels verschw.Diskrim. (o.Grenzwert)	4. Brennpunkte, Fallgesetz, Wurf, Kettenl.	Grenzerfahrungen mit der Mittelstufenmathematik; Ausblick ohne Grenzwertprobleme; Kredit für die Sekantensteigungsidee; Def. u.Erläuterung von Momentangeschw.u.-beschl.
5. Elem.zu ganzrat. Funktionen (evtl. Gauß, Horner)		5a. Inter-und Extrapolation	Vorbereitung der „heuristischen Kurvendisk."; Polynomdivision; geometr.Reihe nebenbei
	6. Fehlversuch bei der Wendeparabel		Grenzerfahrungen als Motor der Begriffsentw.
		7. Parabeltangente mittels konj. Durchmesser	Zeitlosigkeit
	8. Sinnvolle Tangentensteigungsdefinition nach Ausdividieren der Sekantensteig. (Bezüge zu 4.u.7.)		behutsame Begriffsausschärfung und Abstraktio
([illegible].) Stückw.def.Fkt., Wurzelfkt.,gebr.-rat....			
	10. Problematisierung von $\frac{0}{0}$ (Marx, Berkeley) (Gegenbeispiele zum Ausdividieren)		eine Definition kann nicht richtig oder wahr sein, aber angemessen... /der Tangentenbegriff bleibt noch unfertig...
		11. Newton-Näherung 12. Kurvendisk. 13. Rekonstr'aufg. 14. "Ernste"Anw'bsp.	Arbeitsteilung mit Niveaudifferenzierung
	15. Heuristik zum Regelwerk und zum Trennungssatz / Schattierungen des Tangentenbegriffs		gute Definitionen krönen gute Begriffe; man erkennt sie daran, daß sie viel mehr leisten als man zunächst hineinlegte und erwartete... (gute Begriffe werden nicht von Schülern gefunden!)
	16. Quantifikation von $f(x) \approx t_f(x)$ „nahe x_0".		Ausblick auf die weitere Entfaltung im späteren Leistungskurs; die ε-δ-Idee wird hier nur als „je...desto"-Beziehung pointiert, um Punkt 18 vorzubereiten
17. $\binom{\cos t}{\sin t}$ am Einheitskreis (evtl. [illegible]-Der.m.Diff'qu.	18. Ableitung von Sinus u.Kosinus (Kreisbewegung)	19. Schwingungsgleichung/ evtl. Verkettungen	Idee des Rückschlusses aus der einfachen Rückstellbedingung (Saisoneffekte...)
20. [illegible].EXP-u.Log'-[illegible].	21. Abl'versuch	22. [illegible]gl.	Überblick über die Theorie(schwächen), Ausbl.

Analysis für alle - Anlage 1

REGELWERK — Heuristische Zugänge

$$f(x) \approx t_f(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$
$$g(x) \approx t_g(x) = g'(x_0)\cdot(x-x_0) + g(x_0)$$

$$f(x) + g(x) \approx (f'(x_0) + g'(x_0))\cdot(x-x_0) + f(x_0) + g(x_0)$$

$$f(x)\cdot g(x) \approx f'(x_0)\cdot g'(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + [f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)]\cdot(x-x_0) + f(x_0)g(x_0)$$

$$f\circ g(x) \approx f'(g(x_0))\cdot(g(x)-g(x_0)) + f\circ g(x_0)$$
$$\approx f'(g(x_0))\cdot[g'(x_0)\cdot(x-x_0) + g(x_0) - g(x_0)] + f\circ g(x_0)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2-4)^2} = x^2\cdot(x^2-4)^{-2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)^2 - x^2\cdot 4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{2x}{(x^2-4)^2} - \frac{x^2\cdot 4x}{(x^2-4)^3}$$

Hinführung zum Trennungssatz (→ MONOTONIESATZ)

$f'(x_0) > 0$ $\qquad f'(x_0) \approx \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ für $x \approx x_0$

$x < x_0$: $f(x) - f(x_0) < 0$

$x > x_0$: $f(x) - f(x_0) > 0$

> WIEVIEL DER TANGENTENKALKÜL LEISTET, HÄNGT DAVON AB, WIE GUT DIE TANGENTEN ZU DEN SEKANTEN PASSEN!

Versuch der Quantifikation an ausgewählten Beispielen.

Die ganze Analysis ist genau so leistungsfähig, wie die Tangenten „nahe x_o" zur jeweiligen Funktion bzw. zu den Sekanten passen!

„nahe x_o": $x_o = 212{,}93$

$x = 212{,}98$ bis zur 1. Nachkommastelle $|x-x_o|<10^{-1}$

$x = 212{,}9372$ ...... 2. Nachkommastelle $|x-x_o|<10^{-2}$

$x = 212{,}9305$ ...... 3. Nachkommastelle $|x-x_o|<10^{-3}$

usw.

$x = 212{,}9299731$ .... $|x-x_o|<10^{-4}$

„x und x_o stimmen im wesentlichen bis zur k. Nachkommastelle überein, wenn $|x-x_o| < 10^{-k}$ gilt."

Wie genau gilt $f(x) \approx t_f(x)$, wenn x nahe x_o ist?

$f(x)$	$f'(x_o)$	$f(x)-\{f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)\}$	wenn $\lvert x-x_o\rvert<10^{-k}$, dann $\lvert f(x)-t_f(x)\rvert$
x^2	$2x_o$	$x^2-\{2x_o(x-x_o)+x_o^2\} = (x-x_o)^2$	$<10^{-2k}$
$2x^3$	$6x_o^2$	.... $= (2x+4x_o)\cdot(x-x_o)^2$	$<\text{Zahl}\cdot10^{-2k}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x_o^2}$	$\frac{1}{x}-\{-\frac{1}{x_o^2}(x-x_o)+\frac{1}{x_o}\} = \frac{x_o^2+x^2-2xx_o}{x_o^2\cdot x}$	$<\text{Zahl}\cdot10^{-2k}$ (wenn x, x_o auf derselben S. v. 0)
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x_o}}$	.... $= \frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})^2}{2\sqrt{x_o}} = \frac{-(x-x_o)^2}{2\sqrt{x_o}(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})^2}$	$<\text{Zahl}\cdot10^{-2k}$
$\frac{x+1}{x-2}$	$\frac{-3}{(x_o-2)^2}$	.... $= \frac{3(x-x_o)^2}{(x-2)(x_o-2)^2}$	$<\text{Zahl}\cdot10^{-2k}$ (wenn x, x_o auf ders. Seite v. 2)

$$\left| f(x) - \{f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)\} \right| < (\text{feste Zahl})\cdot 10^{-2k},$$

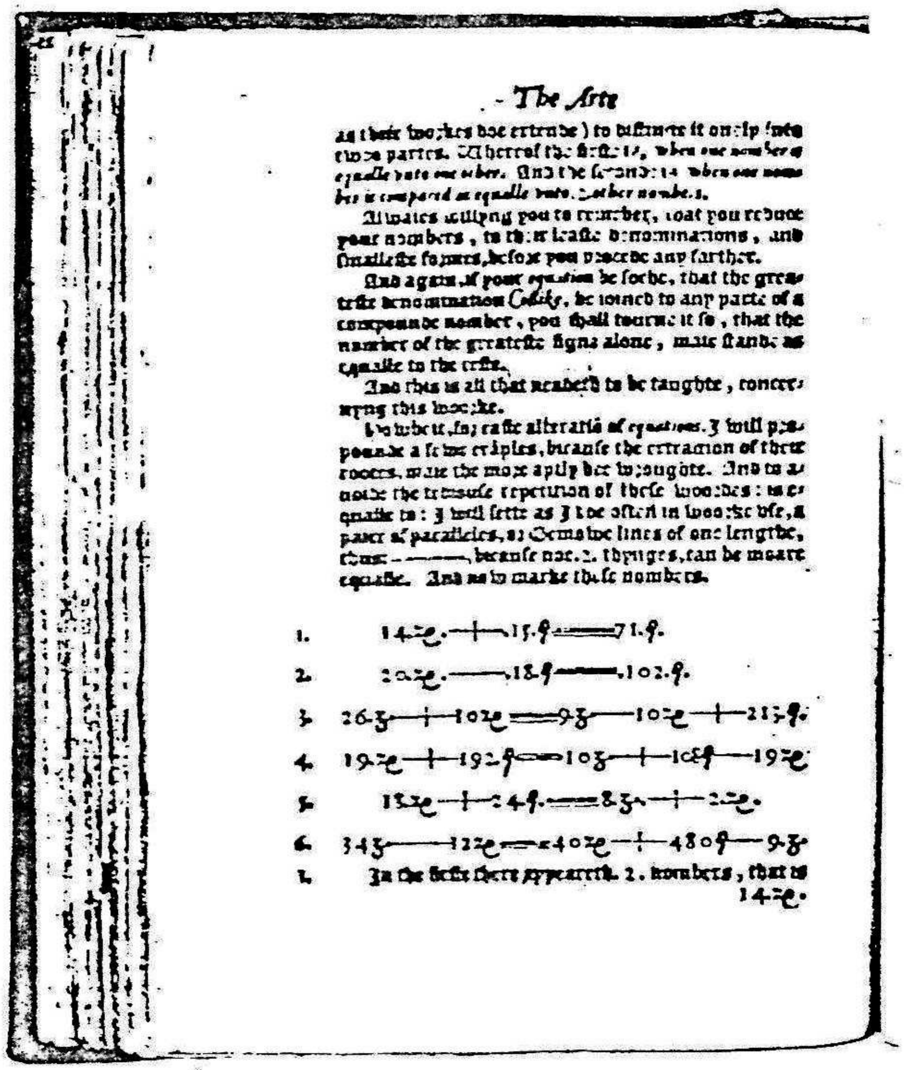
wenn x und x_o sich im wesentlichen nur nach der k. Kommastelle unterscheiden.

Für $x \neq x_o$ darf man dividieren:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - f'(x_o) \right| < (\text{feste Zahl})\cdot 10^{-k}$$

(einfachster „Konvergenz"fall)

Jahr	Mathematiker	Verwendete Symbole	Moderne Form
1494	Pacioli	"Trouame .1.n°. che giõto al suo q̄drat° facia .12."	$x + x^2 = 12$
1514	Vander Hoecke	4 Se.−51 Pri.−30 N. dit is ghelijc 45⅓.	$4x^2 - 51x - 30 = 45\frac{3}{5}$
1521	Ghaligai	1 □e 32 c°−320 numeri	$x^2 + 32x = 320$
1545	Cardan	cub⁹ p: 6 reb⁹ aeq̄lis 20	$x^3 + 6x = 20$
1556	Tartaglia	"Trouame uno numero che azontoli la sua radice cuba uenghi ste, cioe .6."	$x + \sqrt[3]{x} = 6$
1559	Buteo	1 ◊ P6ρP9 [1 ◊ P3ρP24	$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$
1577	Gosselin	12LM1QP48 aequalia 144M24LP2Q	$12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2$
1585	Stevin	3②+4 egales à 2① + 4	$3x^2 + 4 = 2x + 4$
1586	Ramus & Schoner	1q+8l aequatus sit 65	$x^2 + 8x = 65$
1629	Girard	1 (4) + 35 (2) + 24 = 10 (3) + 50 (1) or with the several exponents inclosed in circles	$x^4 + 35x^2 + 24 = 10x^3 + 50x$
1631	Oughtred	½ Z ± √q: ¼ Zq − AE = A	$\frac{1}{2} Z \pm \sqrt{\frac{1}{4} Z^2 - AE} = A$
1631	Harriot	aaa − 3 · bba ==== + 2 · ccc	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
1637	Descartes	yy ∝ cy − $\frac{cx}{b}$ y + ay − ac	$y^2 = cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$
1693	Wallis	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$



The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, when one nomber is equalle unto one other. And the seconde is, when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.

Alwaies willyng you to remember, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your equation be soche, that the greateste denomination Cosike, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteration of equations. I will propounde a fewe exaples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze. + 15.ϕ. ==== 71.ϕ.
2. 20.ze. — 18.ϕ. ==== 102.ϕ.
3. 26.ʒ. + 10ze ==== 9.ʒ. — 10ze + 213.ϕ.
4. 19.ze + 192.ϕ. ==== 10ʒ + 108ϕ — 19ze
5. 18.ze + 24.ϕ. ==== 8.ʒ. + 2.ze.
6. 34ʒ — 12ze ==== 40ze + 480ϕ — 9.ʒ.

1. In the firste there appeareth .2. nombers, that is 14.ze.

Das Zeichen = erschien gedruckt zum ersten Mal in ROBERT RECORDES Buch ›The Whetstone of Witte‹ (1557).